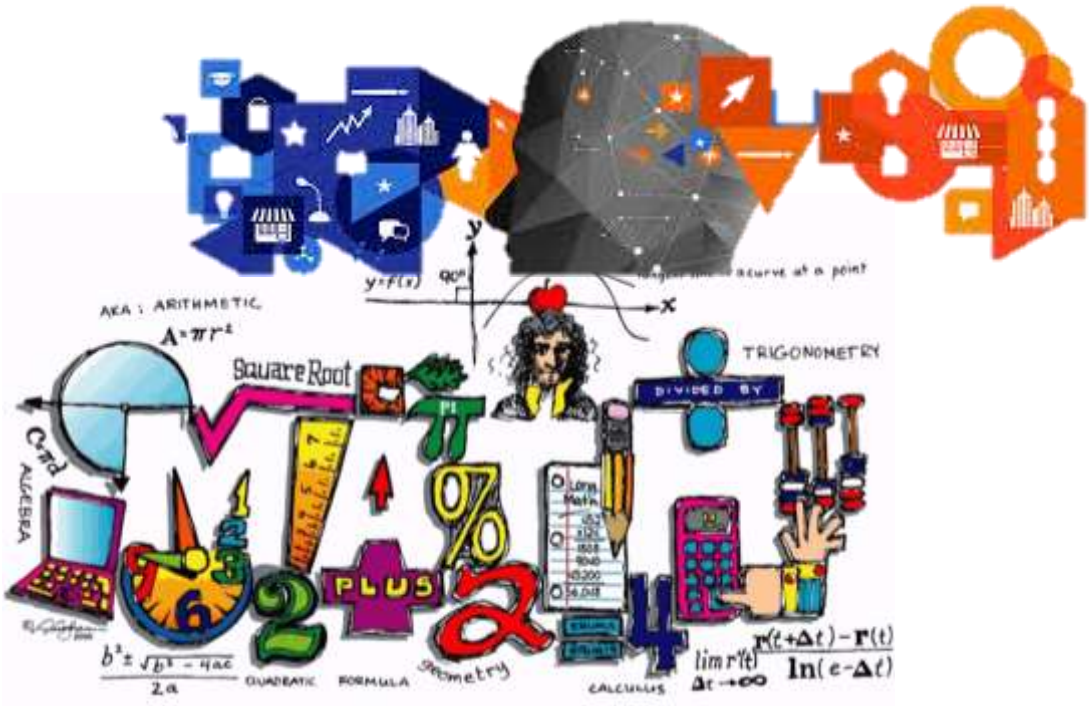
เอกสารประกอบการสอน

คณิตศาสตร์และสถิติเพื่อการวิจัย

000 206 (Mathematics and Statistics for Research)

วิทยาลัยสงฆ์ขอนแก่น

มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย วิทยาเขตขอนแก่น



อาจารย์ ดร.ปาณจิตร สุกุมาลย์

ค.อ.บ.(วิศวกรรมอุตสาหการ) ค.บ.(คอมพิวเตอร์ศึกษา)

ค.ม.(วิจัยและระเมินผลการศึกษา) ค.ด.(วิจัยและประเมินผลการศึกษา)

อาจารย์ประจำหลักสูตรครุศาสตรดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชา การสอนสังคมศึกษา

รายละเอียดของวิชา

ชื่อสถาบันอุดมศึกษา มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย วิทยาเขตขอนแก่น

คณะ พุทธศาสตร์

หลักสูตรสาขาวิชา พระพุทธศาสนา

หมวดที่ 1 ข้อมูลทั่วไป

1. รหัสและชื่อวิชา

000 206 คณิตศาสตร์และสถิติเพื่อการวิจัย (Mathematics and Statistics for Research)

2. จำนวนหน่วยกิต

3 (3-0-6)

3. หลักสูตรและประเภทของรายวิชา

หลักสูตรพุทธศาสตรบัณฑิต หลักสูตรสาขาวิชาพระพุทธศาสนา

4. อาจารย์ผู้รับผิดชอบรายวิชาและอาจารย์ผู้สอน

อาจารย์ผู้สอน อาจารย์ ดร.ปาณจิตร สุกุมาลย์

อาจารย์ผู้รับผิดชอบ อาจารย์ ดร.ปาณจิตร สุกุมาลย์

5. ภาคการศึกษา / ชั้นปีที่เรียน

ภาคการศึกษาที่ 2 ชั้นปีที่ 1

6. รายวิชาที่ต้องเรียนมาก่อน (Pre-requisite) (ถ้ามี)

-

7. รายวิชาที่ต้องเรียนพร้อมกัน (Co-requisite) (ถ้ามี)

-

8. สถานที่เรียน

มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย วิทยาเขตขอนแก่น

9. วันที่จัดทำหรือปรับปรุงรายละเอียดของรายวิชาครั้งล่าสุด

27 มกราคม 2565

หมวดที่ 2 จุดมุ่งหมายและวัตถุประสงค์

1. จุดมุ่งหมายของรายวิชา

1. เพื่อให้นิสิตรู้และเข้าใจโครสร้างทางคณิตศาสตร์ วิธีการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์และการใช้เหตุผล
2. เพื่อให้นิสิตเข้าใจเซตและการดำเนินการของเซต
3. เพื่อให้นิสิตเข้าใจระบบและคุณสมบัติของจำนวนจริง
4. เพื่อให้นิสิตเข้าใจเมตริกซ์และการดำเนินการของเมตริกซ์

5. เพื่อให้นิสิตประยุกต์ใช้สมการ อสมการ ความสัมพันธ์และฟังก์ชั่น
6. เพื่อให้นิสิตมีความรู้และเข้าใจหลักพื้นฐานทางสถิติ
7. เพื่อให้นิสิตอธิบายเก็บรวบรวมข้อมูล การหาค่าแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง การกระจาย และออกแบบการนำเสนอข้อมูล
8. เพื่อให้นิสิตเข้าใจสถิติบรรยาย สถิติอ้างอิง และการทดสอบสมมติฐาน
1. เพื่อให้นิสิตสามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูลงานวิจัยและแปลความหมายได้อย่างถูกต้อง
2. เพื่อให้นิสิตมีความรู้และเข้าใจหลักการวิจัยเบื้องต้น รูปแบบการวิจัย การออกแบบการวิจัย และขั้นตอนการวิจัย
3. เพื่อให้นิสิตการเขียนโครงร่างการวิจัยและการเขียนรายงานผลการวิจัย

2. วัตถุประสงค์ในการพัฒนา / ปรับปรุงรายวิชา

เพื่อให้นิสิตมีความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ สามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาใช้ในชีวิตประจำวันและการศึกษาสาขาวิชาต่างๆ และสามารถวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติ และการวิจัย

หมวดที่ 3 ลักษณะและการดำเนินการ

1. คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ตัวบ่งชี้เชิงปริมาณ เซต การให้เหตุผล ระบบและคุณสมบัติของจำนวนจริง สมการและอสมการ ความสัมพันธ์ ฟังก์ชั่น เมทริกซ์ หลักพื้นฐานทางสถิติ การรวบรวมข้อมูล การแจกแจงความถี่ และการหาค่าแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง สถิติแบบบรรยาย สถิติทดสอบ การทดสอบสมมติฐาน รูปแบบการวิจัย การออกแบบการวิจัย ขั้นตอนการวิจัย การวิเคราะห์ข้อมูลด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป การเขียนโครงร่างการวิจัยและการเขียนรายงานผลการวิจัย

2. จำนวนชั่วโมงที่ต้องใช้ต่อภาคการศึกษา

บรรยาย	สอนเสริม	การฝึกปฏิบัติ / งานภาคสนาม / การฝึกงาน	การศึกษาด้วยตนเอง
บรรยาย 45 ชั่วโมงต่อภาคการศึกษา	ไม่มี	ไม่มี	การศึกษาด้วยตนเอง 6 ชั่วโมงต่อสัปดาห์

3. จำนวนชั่วโมงต่อสัปดาห์ที่อาจารย์ให้คำปรึกษาและแนะนำทางวิชาการแก่นักศึกษาเป็นรายบุคคล

- อาจารย์จัดเวลาให้คำปรึกษาเป็นรายบุคคล หรือ รายกลุ่มตามความต้องการ 2 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ (เฉพาะรายที่ต้องการ)

หมวดที่ 4 การพัฒนาผลการเรียนรู้ของนิสิต

แผนที่แสดงการกระจายความรับผิดชอบมาตรฐานการเรียนรู้จากหลักสูตรสู่รายวิชา (Curriculum Mapping)

● ความรับผิดชอบหลัก ○ ความรับผิดชอบรอง

รหัสวิชา	รายวิชา	๑. คุณธรรม จริยธรรม			๒. ความรู้			๓. ทักษะทางปัญญา			๔. ทักษะความสัมพันธ์ฯ			๕. ทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลขฯ		
		๑	๒	๓	๑	๒	๓	๑	๒	๓	๑	๒	๓	๑	๒	๓
๐๐๐ ๒๐๒	คณิตศาสตร์และสถิติเพื่อการวิจัย			●	●		●	●	●					●		●

หมายเหตุ สัญลักษณ์ ● หมายถึง ความรับผิดชอบหลัก / สัญลักษณ์ ○ หมายถึง ความรับผิดชอบรอง / เว้นว่าง หมายถึง ไม่ได้รับผิดชอบ จะปรากฏอยู่ในแผนที่แสดงการกระจายความรับผิดชอบมาตรฐานผลการเรียนรู้จากหลักสูตรสู่รายวิชา (Curriculum Mapping)

1. คุณธรรมและจริยธรรม		
1) ผลการเรียนรู้ด้านคุณธรรม จริยธรรม	**2) กลยุทธ์การสอนที่ใช้พัฒนาการเรียนรู้ด้านคุณธรรม จริยธรรม**	**3) กลยุทธ์การประเมินผลการเรียนรู้ด้านคุณธรรม จริยธรรม**
1. มีศีลธรรม และศรัทธาอุทิศตนเพื่อพระพุทธศาสนา 2. มีจิตสาธารณะและเสียสละเพื่อส่วนรวม 3. เคารพสิทธิ ศักดิ์ศรีความเป็นมนุษย์ และรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น	เช็คชื่อก่อนทำการสอนทุกครั้ง ตรวจสอบชิ้นงานว่าส่งตามกำหนดเวลาหรือไม่	1. ประเมินจากพฤติกรรมการเข้าเรียน 2. ประเมินผลการส่งงานที่ได้รับมอบหมายตามเวลา
2. ความรู้		
1) ผลการเรียนรู้ด้านความรู้	**2) กลยุทธ์การสอนที่ใช้พัฒนาการเรียนรู้ด้านความรู้**	**3) กลยุทธ์การประเมินผลการเรียนรู้ด้านความรู้**
1. มีความรู้ ความเข้าใจหลักการทฤษฎีและเนื้อหา 2. ใช้ความรู้มาอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นได้อย่างมีเหตุผล 3. สามารถนำความรู้มาปรับใช้ในการดำเนินชีวิตได้และแสวงหาความรู้อย่างต่อเนื่อง	1. ใช้การเรียนการสอนในหลากหลายรูปแบบโดยเน้นหลักการทางทฤษฎีและประยุกต์ทางปฏิบัติ ในสภาพแวดล้อมจริง โดยทันต่อการเปลี่ยนแปลง ทั้งนี้ให้เป็นไปตามลักษณะของรายวิชาตลอดจนเนื้อหาสาระของแขนงวิชาที่นิสิตสังกัด 2. จัดให้มีการเรียนรู้จากสถานการณ์จริงโดยลงมือปฏิบัติจริง	1. การสอบกลางภาคเรียนและปลายภาคเรียน 2. ประเมินจากรายงานที่นิสิตจัดทำ 3. ประเมินจากโครงการที่นำเสนอ 4. ประเมินจากการนำเสนอรายงานในชั้นเรียน

3. ทักษะทางปัญญา		
1) ผลการเรียนรู้ด้านปัญญา	**2) กลยุทธ์การสอนที่ใช้พัฒนาการเรียนรู้ด้านปัญญา**	**3) กลยุทธ์การประเมินผลการเรียนรู้ด้านปัญญา**
1. สามารถค้นหาข้อมูล ทำความเข้าใจ และประเมินข้อมูลจากหลักฐาน 2. สามารถวิเคราะห์และสังเคราะห์อย่างเป็นระบบและมีเหตุผล 3. สามารถประยุกต์ความรู้และทักษะเพื่อแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม	1. สอนโดยใช้กรณีศึกษาทางการประยุกต์ 2. ให้นิสิตมีโอกาสปฏิบัติจริง	ประเมินตามสภาพจริงจากผลงานและการปฏิบัติของนิสิต เช่น ประเมินจากกรณีศึกษาการทดสอบ โดยใช้แบบทดสอบ
4. ทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบ		
1) ผลการเรียนรู้ด้านทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบ	**2) กลยุทธ์การสอนที่ใช้พัฒนาการเรียนรู้ด้านทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบ**	**3) กลยุทธ์การประเมินผลการเรียนรู้ด้านทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบ**
1. สามารถทำงานเป็นทีมทั้งในฐานะผู้นำและผู้ตาม 2 .มีมนุษยสัมพันธ์ รู้จักควบคุมอารมณ์ และยอมรับความแตกต่างระหว่างบุคคล 3. รับผิดชอบต่อตนเองและสังคม	ร่วมกันอภิปรายงานวิจัยของเพื่อนเมื่อเพื่อนรายงานหน้าชั้น	สังเกตพฤติกรรมขณะร่วมกันอภิปราย
5. ทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลข การสื่อสาร และการใช้เทคโนโลยีสารสนเทศ		
1) ผลการเรียนรู้ด้านทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลข การสื่อสาร และการใช้เทคโนโลยีสารสนเทศ	**2) กลยุทธ์การสอนที่ใช้พัฒนาการเรียนรู้ด้านทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลข การสื่อสาร และการใช้เทคโนโลยีสารสนเทศ**	**3) กลยุทธ์การประเมินผลการเรียนรู้ด้านทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลข การสื่อสาร และการใช้เทคโนโลยีสารสนเทศ**
1. ใช้ทักษะวิเคราะห์เชิงตัวเลขได้ 2. ใช้ภาษาในการติดต่อสื่อ	1. มอบหมายงานให้ศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง จาก สื่อการสอน e –	1. ประเมินผลการส่งงานที่ได้รับมอบหมายตามเวลา

ความหมายได้ดี ทั้งการฟัง พูด อ่านและเขียน 3. ใช้เทคโนโลยีสารสนเทศในการเรียนรู้ได้อย่างเหมาะสม	learning e-testing แล้วส่งงาน 2. นำเสนอโดยใช้รูปแบบและเทคโนโลยีที่เหมาะสม	2. การเลือกใช้รูปแบบและเทคโนโลยีที่เหมาะสมในการนำเสนอผลงาน

หมวดที่ 5 แผนการสอนและการประเมินผล

1. แผนการสอน

สัปดาห์ที่	หัวข้อ/รายละเอียด	จำนวนชั่วโมง	กิจกรรมการเรียนการสอน/สื่อที่ใช้	ผู้สอน
1	**คำอธิบายรายวิชา การวัดผลประเมินผล** **บทที่ 1 พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ตัวบ่งชี้เชิงปริมาณ** ธรรมชาติของคณิตศาสตร์ ความหมายและโครงสร้างของคณิตศาสตร์ ธรรมชาติ บทบาทและความสำคัญของคณิตศาสตร์ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวน	3	ปฐมนิเทศ ชี้แจงรายละเอียดรายวิชา บรรยาย อภิปราย Power point MCUKKMOOC	ดร.ปาณจิตร สุกุมาลย์
2	**บทที่ 2 ตรรกศาสตร์** ประพจน์ ประโยคเปิด ค่าความจริง ตัวบ่งชี้ ปริมาณ ตัวเชื่อมข้อความ นิเสธ การหาค่าความจริง การสมมูลกัน และการประยุกต์การให้เหตุผล	3	บรรยาย อภิปราย แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ซักถาม Power point MCUKKMOOC	ดร.ปาณจิตร สุกุมาลย์
3	**บทที่ 3 เซต** ความหมายของเซต วิธีเขียนเซต ประเภทของเซต Power set subset การดำเนินการเซต การดำเนินการเซตเวนแอนด์ออยเลอร์ การประยุกต์เซต	3	บรรยาย อภิปราย แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ซักถาม Power point ใบงาน MCUKKMOOC	ดร.ปาณจิตร สุกุมาลย์

สัปดาห์ที่	หัวข้อ/รายละเอียด	จำนวนชั่วโมง	กิจกรรมการเรียนการสอน/สื่อที่ใช้	ผู้สอน
4	**บทที่ 4 ระบบจำนวนจริง** สมบัติของจำนวนจริง สมการ อสมการ การหาค่าของตัวแปรในระบบจำนวนจริง การประยุกต์ใช้จำนวนจริงในชีวิตประจำวัน	3	บรรยาย อภิปราย แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ซักถาม Power point ใบงาน	ดร.ปาณจิตร สุกุมาลย์
5	**บทที่ 5 สมการและอสมการ** ค่าสัมบูรณ์และการหาค่าตัวแปรในระบบจำนวนจริงทดสอบย่อย	3	บรรยาย อภิปราย แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ซักถาม Power point ใบงาน	ดร.ปาณจิตร สุกุมาลย์
สัปดาห์ที่	**หัวข้อ/รายละเอียด**	**จำนวนชั่วโมง**	**กิจกรรมการเรียนการสอน/สื่อที่ใช้**	**ผู้สอน**
6	**บทที่ 6 ความสัมพันธ์และฟังก์ชั่น** คู่อันดับ ผลคูณคาทีเซียน ความสัมพันธ์ การหาค่า Domain Range ความสัมพันธ์ Composit Function	3	บรรยาย อภิปราย แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ซักถาม Power point ใบงาน MCUKKMOOC	ดร.ปาณจิตร สุกุมาลย์
7	**บทที่ 7 เมทริกซ์** ความหมายของเมทริกซ์ ชนิดของเมทริกซ์ การบวกลบและคูณเมทริกซ์ การทรานสโพส และอินเวอร์ส	3	บรรยาย อภิปราย แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ซักถาม Power point ใบงาน	ดร.ปาณจิตร สุกุมาลย์
8	**สอบกลางภาค**	3	MCUKKMOOC	
9	**บทที่ 8 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสถิติ** สถิติและการเก็บรวบรวมข่อมูล ที่มาและประเภทของขอมูล ความหมายและประเภทของสถิติ การเก็บรวมรวมข่อมูล และการ	3	บรรยาย อภิปราย แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ซักถาม Power point MCUKKMOOC	ดร.ปาณจิตร สุกุมาลย์

สัปดาห์ที่	หัวข้อ/รายละเอียด	จำนวนชั่วโมง	กิจกรรมการเรียนการสอน/สื่อที่ใช้	ผู้สอน
	สุมตัวอยาง สรุปทบทวน			
10	**บทที่ 9 การนำเสนอขอมูล** การนำเสนอขอมูลปริมาณและคุณภาพ การนำข้อมูลสถิติไปใช้ในการตัดสินใจ	3	บรรยาย อภิปราย แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ซักถาม Power point	ดร.ปาณจิตร สุกุมาลย์
11	การประยุกต์ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับการนำเสนอข้อมูลทางสถิติ	3	การอบรมเชิงปฏิบัติการวิเคราะห์และการนำเสนอข้อมูลด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป	นักวิชาการศึกษา วิทยาลัยสงฆ์ขอนแก่น
12	**บทที่ 10 สถิติเชิงบรรยาย สถิติเชิงอ้างอิง และการทดสอบสมติฐานการวิจัย** การวัดแนวโน้มสูสวนกลาง การวัดการกระจาย การแจกแจงของข้อมูล สถิติบรรยาย สถิตอ้างอิง และการทดสอบสมมติฐาน	3	บรรยาย อภิปราย แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ซักถาม Power point MCUKKMOOC	ดร.ปาณจิตร สุกุมาลย์
สัปดาห์ที่	**หัวข้อ/รายละเอียด**	**จำนวนชั่วโมง**	**กิจกรรมการเรียนการสอน/สื่อที่ใช้**	**ผู้สอน**
13	**บทที่ 11 การวิเคราะห์ข้อมูล** วิเคราะห์ข้อมูลสถิติเชิงบรรยายและการแปลความหมาย การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพและการตีความ	3	บรรยายประกอบกับยกตัวอย่างโจทย์ Power point MCUKKMOOC	ดร.ปาณจิตร สุกุมาลย์
14	การประยุกต์ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับการวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติ	3	อบรมเชิงปฏิบัติการการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป	ดร.ปาณจิตร สุกุมาลย์ และนายสุทธิพงษ์ อุพลเถียร

สัปดาห์ที่	หัวข้อ/รายละเอียด	จำนวนชั่วโมง	กิจกรรมการเรียนการสอน/สื่อที่ใช้	ผู้สอน
15	**บทที่ 12 การวิจัย** หลักการ แนวความคิดเกี่ยวกับการวิจัย การเขียนโครงร่างการวิจัย การตั้งปัญหาเพื่อการวิจัย ขั้นตอนต่างๆของการวิจัย รูปแบบการวิจัย การวิจัยแบบต่างๆ หลักการออกแบบการวิจัย การสุ่มตัวอย่าง หลักการเขียนเค้าโครงการวิจัย และการเขียนรายงานการวิจัย	3	บรรยาย อภิปราย แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ซักถาม Power point เชิญวิทยากรบรรยายพิเศษเกี่ยวกับ การกำหนดหัวข้อวิจัยอย่างไรให้ตอบโจทย์สังคม ฝึกปฏิบัติการ	ดร.ปาณจิตร สุกุมาลย์และวิทยากรบรรยายพิเศษ
16	**สอบปลายภาค**	3	MCUKKMOOC	

2. แผนการประเมินผลการเรียนรู้

ที่	วิธีการประเมิน	สัปดาห์ที่ประเมิน	สัดส่วนของการประเมินผล
1	สอบกลางภาค สอบปลายภาค	8 17	20% 30%
2	การนำเสนอรายงาน การทำงานกลุ่มและผลงาน การอ่านและสรุปบทความ การส่งงานตามที่มอบหมาย	ตลอดภาคการศึกษา	40%
3	การเข้าชั้นเรียน การมีส่วนร่วม อภิปราย เสนอความคิดเห็นในชั้นเรียน	ตลอดภาคการศึกษา	10%

หมวดที่ 6 ทรัพยากรประกอบการเรียนการสอน

1. เอกสารและตำราหลัก

คณาจารย์ มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย. คณิตศาสตร์เบื้องต้น. กรุงเทพ ฯ : มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย. 2551.

คณาจารย์ มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย. สถิติเบื้องต้นและการวิจัย. กรุงเทพ ฯ : มหาวิทยาลัยมหาจุฬลงกรณราชวิทยาลัย. 2551.

2. เอกสารและข้อมูลสำคัญ

ประวิต เอราวรรณ์. การวิจัยในชั้นเรียน . กรุงเทพ : ดอกหญ้าวิชาการ , 2545.

บุญชม ศรีสะอาด. วิธีการทางสถิติสำหรับการวิจัย . กรุงเทพ : สุวีริยาสาส์น , 2538.

ศิริชัย กาญจนวาสี. การเลือกใช้สถิติที่เหมาะสมกับการวิจัย . กรุงเทพ : บุญศิริการพิมพ์, 2544.

3. เอกสารและข้อมูลแนะนำ

e-book มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย วิทยาเขตขอนแก่น

หมวดที่ 7 การประเมินและปรับปรุงการดำเนินการของรายวิชา

1. กลยุทธ์การประเมินประสิทธิผลของรายวิชาโดยนักศึกษา

กลยุทธ์การประเมินประสิทธิผลของรายวิชาโดยนักศึกษา การประเมินประสิทธิผลในรายวิชานี้ที่จัดทำโดยนักศึกษา ได้จัดกิจกรรมในการนำแนวคิดและ ความเห็นจากนักศึกษาได้ดังนี้

1.1 ประเมินการสอนโดยการซักถามและแลกเปลี่ยนเรียนรู้

1.2 ซักถามข้อสงสัยในรายละเอียดเนื้อหา

1.3 การแลกเปลี่ยนความเห็นต่อการเรียนรู้ระหว่างครูกับผู้เรียน

2. กลยุทธ์การประเมินการสอน

1. ผู้เรียนแสดงความเห็นต่อวิธีการจัดการเรียนรู้
2. ผู้เรียนซักถามและอภิปรายเพื่อปรับเปลี่ยนการจัดการเรียนรู้

3. การปรับปรุงการสอน

ปีการศึกษานี้ผู้สอนให้นิสิตฝึกเขียนโครงร่างวิจัยตามสาขาวิชาให้มีความสอดคล้องและเหมาะสม ผู้สอนจึงต้องมีการเตรียมตัวอย่างงานวิจัยเพิ่มขึ้นเพื่อให้นิสิตปีที่ 3 สามารถนำไปปรับใช้ทดลองเขียนร่างโครงงานวิจัยที่สนใจจะทำในชั้นปีที่ 4

4. การทวนสอบมาตรฐานผลสัมฤทธิ์ของนักศึกษาในรายวิชา

ในระหว่างกระบวนการสอนรายวิชา มีการทวนสอบผลสัมฤทธิ์ในรายหัวข้อตามที่คาดหวังจากการเรียนรู้ในวิชา ได้จากการสอบถามนักศึกษา หรือการสุ่มตรวจผลงานขอนักศึกษารวมถึงพิจารณาจาก ผลการทดสอบย่อยและหลังการออกผลการเรียนรายวิชา มีการทวนสอบผลสัมฤทธิ์โดยรวมในวิชา ดังนี้

4.1 ให้ผู้เรียนได้รู้ผลการสอบและการควบแบบทดสอบว่ามีจุดเด่นจุดด้อยอย่างไร

4.2 แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ซักถามและตอบในสิ่งที่ผู้เรียนสงสัย เพื่อหาแนวทางการพัฒนาร่วมกัน

5. การดำเนินการทบทวนและการวางแผนปรับปรุงประสิทธิผลของรายวิชา

นำผลการสอบ ผลการประเมินในการทดสอบการเรียนรู้และพฤติกรรม การสอบย่อย และการสอบกลางภาคนำมาแลกเปลี่ยน ซักถาม และหาแนวทางร่วมกันในการพัฒนาผู้เรียนให้เกิดผลการเรียนดีขึ้น

มีความรู้ความสามารถและทักษะทางคณิตศาสตร์ดีขึ้น ปรับเปลี่ยนเรื่องเทคนิควิธีการสอน สื่อการเรียนรู้ เทคโนโลยีที่สนับสนุนวิธีการสอน แหล่งการค้นคว้า วิชาหลักสถิติที่หลากหลาย มหาวิทยาลัยมีการจัดตารางเรียนสลับระหว่างการเรียน on site และการเรียน ออนไลน์

****

หน่วยที่ 1 คณิตศาสตร์ (Mathematics)

บทที่ 1
ธรรมชาติและโครงสร้างของคณิตศาสตร์
(Nature and Construction of Mathematic)

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญต่อชีวิตของมนุษย์เป็นอันมาก มนุษย์เริ่มเรียนรู้แนวทางคณิตศาสตร์จากสภาพแวดล้อมหรือธรรมชาติแล้วนำไปสู่การสรุปเป็นกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ซึ่งสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวันได้ คนส่วนใหญ่ที่ไม่ได้เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์โดยตรงมักจะเข้าใจว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องของตัวเลขและการคำนวณเท่านั้น ซึ่งที่จริงแล้วคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่หมายรวมไปถึงการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลด้วย คณิตศาสตร์นับเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการศึกษาค้นคว้าสร้างองค์ความรู้ในศาสตร์อื่น ๆ และคิดค้นสิ่งประดิษฐ์ต่าง ๆ

ดังนั้นในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์จึงจำเป็นจะต้องรู้และเข้าใจเกี่ยวกับธรรมชาติของคณิตศาสตร์เพื่อประโยชน์ในการเลือกวิธีที่จะศึกษาให้เหมาะสมและสอดคล้องกับธรรมชาติของคณิตศาสตร์ต่อไป

1. ธรรมชาติของคณิตศาสตร์

นักการศึกษาทางคณิตศาสตร์ได้สรุปประเด็นธรรมชาติของคณิตศาสตร์ที่สำคัญ ๆ ไว้ดังนี้

1.1 คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวกับความคิดรวบยอด

ในวิชาคณิตศาสตร์มีการสร้างความคิดต่าง ๆ ขึ้นซึ่งความคิดเหล่านี้ได้มาจากการสรุปความคิดเห็นที่เหมือน ๆ กัน ซึ่งอาจจะได้จากประสบการณ์หรือปรากฏการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น เรียกว่า ความคิดรวบยอด เช่น ความคิดรวบยอดเรื่องการเท่ากันของจำนวน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส การเท่ากันทุกประการ เป็นต้น ซึ่งในแต่ละเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์เมื่อผู้เรียนได้ศึกษาและจะต้องเกิดความคิดรวบยอดขึ้นในเนื้อหานั้น ๆ จึงจะเกิดประโยชน์

1.2 คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่แสดงความเป็นเหตุเป็นผล

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีการแสดงแนวคิดอย่างเป็นระบบ เป็นขั้นตอน การสรุปในแต่ละขั้นตอนจะต้องมีการอ้างอิงเหตุผลอย่างสมเหตุสมผล ทุกขั้นตอนในแต่ละเนื้อหาจะเป็นเหตุเป็นผลต่อกัน มนุษย์จึงสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาค้นคว้าองค์ความรู้ใหม่ๆ และคิดค้นสิ่งประดิษฐ์ต่างๆ ได้

1.3 คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นสากล

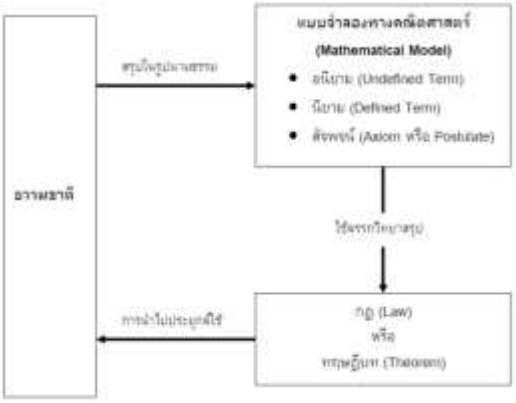
ในวิชาคณิตศาสตร์จะมีการกำหนดสัญลักษณ์ขึ้นใช้เพื่อสื่อความหมาย ซึ่งทำให้สามารถเขียนข้อความทางคณิตศาสตร์ได้รัดกุม ชัดเจน สื่อความหมายได้ถูกต้อง เกิดความเข้าใจตรงกัน จึงนับได้ว่าคณิตศาสตร์มีภาษาเฉพาะของตัวเอง เป็นภาษาที่ทุกคนที่เรียนคณิตศาสตร์เข้าใจตรงกัน เช่น $\log 10 = 1$

1.4 คณิตศาสตร์เป็นศิลปะอย่างหนึ่ง

ในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์นั้น นักคณิตศาสตร์นอกจากจะเป็นนักคิดแล้วจำเป็นต้องเป็นผู้มีจิตนาการ ช่างสังเกต มีความละเอียดรอบคอบ รู้จักเลือกคำอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทมาใช้ได้อย่างถูกต้อง ตามลำดับก่อนหลังพร้อมทั้งการให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผล รวมถึงการถ่ายทอดสิ่งที่พิสูจน์ได้แล้วออกมาอย่างมีระบบระเบียบ เป็นขั้นเป็นตอนอย่างชัดเจน พอจะสรุปได้ว่าความงามของคณิตศาสตร์อยู่ที่ความมีระเบียบ ความกลมกลืนของแนวคิดตลอดจนความละเอียดถี่ถ้วนและรอบคอบ

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีโครงสร้าง

โครงสร้างของคณิตศาสตร์ที่สมบูรณ์นั้นมีกำเนิดมาจากธรรมชาติ โดยมนุษย์ได้เฝ้าสังเกตความเป็นไปของธรรมชาติ ซึ่งอาจจะเป็นทางชีววิทยา ฟิสิกส์ จิตวิทยา เศรษฐศาสตร์ ฯลฯ โดยพิจารณาปัญหาต่าง ๆ ของเนื้อหาเหล่านั้นแล้วสรุปในรูปนามธรรม สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเนื้อหานั้น ๆ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย คำอนิยาม คำนิยาม และสัจพจน์ จากนั้นจึงใช้ตรรกศาสตร์สรุปออกมาเป็นกฎหรือทฤษฎีบท แล้วนำกฎหรือทฤษฎีบทเหล่านี้ไปประยุกต์ใช้ในธรรมชาติต่อไป ด้วยวิธีการดังกล่าวทำให้มนุษย์เข้าใจความเป็นไปของธรรมชาติได้ดียิ่งขึ้นและในขณะที่นำกฎหรือทฤษฎีบทไปประยุกต์ใช้กับธรรมชาติ อาจจะได้ข้อมูลใหม่ก่อให้เกิดการปรับปรุงแก้ไขแบบจำลอง จนกระทั่งอาจจะ**ทำให้ได้กฎหรือทฤษฎีบทที่ดีกว่าเดิม แล้วนำไปประยุกต์ใช้กับธรรมชาติอีกครั้งหนึ่ง ดังแผนภูมิต่อไปนี้**



2. โครงสร้างของคณิตศาสตร์

โครงสร้างของคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 4 ส่วน ดังนี้

1. **คำอนิยาม คำอนิยาม (undefined term)** หมายถึงคำที่ไม่สามารถให้คำจำกัดความได้ แต่สามารถเข้าใจความหมายได้ โดยอาศัยการรับรู้จากประสบการณ์ ความคุ้นเคยกับคุณสมบัติของมัน เช่น จุด เส้น ระนาบ เป็นต้น
2. **คำนิยาม คำนิยาม (defined term)** หมายถึงคำที่สามารถให้คำจำกัดความได้ เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส วงกลม เส้นขนาน เป็นต้น

3. **สัจพจน์ สัจพจน์ (postulate)** หมายถึงข้อความที่ยอมรับหรือตกลงว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ เช่น “เส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุดเพียงจุดเดียวเท่านั้น” “ลากเส้นตรงให้ผ่านจุดสองจุดที่แตกต่างกันได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น”
4. **ทฤษฎีบท ทฤษฎีบท (theorem)** หมายถึงข้อความที่สามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริง ซึ่งในการพิสูจน์อาจใช้คำอนิยาม คำนิยาม สัจพจน์ หรือทฤษฎีบทอื่น ๆ ที่ได้พิสูจน์มาแล้ว เช่น “มุมภายในรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา” “เส้นตรงสองเส้นตัดกันมุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน”

3. ระบบคณิตศาสตร์

ระบบคณิตศาสตร์มีองค์ประกอบที่สำคัญ 2 ส่วน คือ โครงสร้างของคณิตศาสตร์ และ กระบวนการให้เหตุผล สำหรับโครงสร้างของคณิตศาสตร์ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 2 ในหัวข้อ 3 จะกล่าวถึงเฉพาะกระบวนการให้เหตุผล

กระบวนการให้เหตุผล (reasoning) เป็นเครื่องมือที่มนุษย์ใช้แสวงหาความรู้ใหม่ ๆ โดยการนำเอาความจริงอย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายอย่างในระบบ ซึ่งเรียกว่า เหตุหรือข้อตั้ง (premise) มาวิเคราะห์แจกแจงแสดงความสัมพันธ์ เพื่อให้เกิดความจริงอันใหม่ขึ้น ซึ่งเรียกว่า ผล หรือ ผลสรุป หรือ ข้อยุติ (conclusion)

กระบวนการให้เหตุผลแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะดังนี้

1. การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (inductive reasoning) เป็นการสรุปความรู้ใหม่ หรือสรุปผลการค้นหาความจริง โดยอาศัยข้อสังเกตหรือผลการทดลองหลาย ๆ ตัวอย่าง จากกรณีย่อย ๆ แล้วสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไป ซึ่งผลสรุปที่ได้จากการให้เหตุผลแบบนี้ไม่ได้ถูกบังคับจากเหตุที่กำหนดให้ เนื่องจากเหตุแต่ละเหตุที่กำหนดให้หรือนำมาอ้างอิงเป็นอิสระต่อกัน

ตัวอย่าง การให้เหตุผลเชิงอุปนัย

ตัวอย่าง 1 จงหาพจน์ที่ n ของ 1, 3, 5, 7, 9, ... พิจารณาแต่ละพจน์ของลำดับต่อไปนี้

พจน์ที่ 1 คือ 1

พจน์ที่ 2 คือ 3 เขียนได้เป็น 1 + 2

พจน์ที่ 3 คือ 5 เขียนได้เป็น 1 + 2 + 2

พจน์ที่ 4 คือ 7 เขียนได้เป็น 1 + 2 + 2 + 2

พจน์ที่ 5 คือ 9 เขียนได้เป็น 1 + 2 + 2 + 2 + 2

จากการสังเกตจะเห็นว่า จำนวนของ 2 ที่บวกกับ 1 น้อยกว่าจำนวนที่แสดงลำดับที่ของพจน์อยู่ 1

ดังนั้นพจน์ที่ 100 คือ 1 บวกด้วย 2 อีก 99 ตัว

นั่นคือ พจน์ที่ 100 คือ $1 + (99 \times 2) = 199$

ดังนั้น พจน์ที่ n หรือรูปทั่วไปของลำดับ จึงหาได้จาก $1 + (n - 1)2 = 2n - 1$

ดังนั้นลำดับ 1, 3, 5, 7, 9, ... จึงเขียนเป็น 1, 3, 5, 7, 9, ..., $2n - 1$

ตัวอย่าง 2 จากการสังเกตต้นมะพร้าวพบว่า

ต้นที่ 1 “ไม่แตกกิ่ง”

ต้นที่ 2 “ไม่แตกกิ่ง”

ต้นที่ 3 “ไม่แตกกิ่ง”

. .

. .

. .

ต้นที่ 100 “ไม่แตกกิ่ง”

จากสิ่งที่สังเกตจึงสรุปว่า “ต้นมะพร้าวทุกต้นไม่แตกกิ่ง”

โดยทั่ว ๆ ไป การให้เกตุผลแบบอุปนัย นิยมใช้ในการศึกษาค้นคว้าคุณสมบัติต่าง ๆ ทางวิทยาศาสตร์ เช่น ข้อสรุปที่ว่า “สารสกัดที่ได้จาดสะเดาสามารถใช้เป็นยากำจัดศัตรูพืชได้” เป็นข้อสรุปที่ได้จากการทดลองซ้ำกันหลาย ๆ ครั้ง แล้วได้ผลการทดลองตรงกัน หรือในทางคณิตศาสตร์จะใช้ในเรื่องการสร้างสัจพจน์ เช่น เมื่อทดลองลากเส้นตรงสองเส้นให้ตัดกัน จะพบว่า เส้นตรงสองเส้นจะตัดกันเพียงจุดเดียวเท่านั้น ไม่ว่าจะทดลองลากกี่ครั้งก็ตาม จึงสรุปได้ว่า เส้นตรงสองเส้นตัดกันเพียงจุดเดียวเท่านั้น

2. การให้เหตุผลเชิงนิรนัย (deductive reasoning) เป็นการสรุปความรู้ใหม่ หรือ ข้อความจริงใหม่ ซึ่งเรียกว่าผลสรุปที่เป็นผลมาจากการนำข้อความที่กำหนดให้ซึ่งยอมรับว่าเป็นจริง ซึ่งเรียกว่าเหตุ ถ้าถ้าเหตุที่กำหนดให้บังคับให้เกิดผลสรุป แสดงว่า การให้เหตุผลดังกล่าวสมเหตุสมผล (valid) แต่ถ้าเหตุที่กำหนดให้ไม่สามารถจะบังคับให้เกิดผลสรุปได้ แสดงว่า การให้เหตุผลดังกล่าว ไม่สมเหตุสมผล (in valid)

ตัวอย่าง การให้เหตุผลเชิงนิรนัย

ตัวอย่าง 3 พิจารณาการให้เหตุผลต่อไปนี้

เหตุ

1. หมูเป็นสัตว์น้ำ

2. สัตว์น้ำทุกชนิดออกลูกเป็นตัว

ผลสรุป หมูออกลูกเป็นตัว การให้เหตุผลดังกล่าวเป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล เนื่องจากเหตุแต่ละเหตุที่นำมาอ้างอิงบังคับให้เกิดผลสรุป

ตัวอย่าง 4 พิจารณาให้เหตุผลต่อไปนี้

เหตุ

1. มนุษย์ทุกคนมีสองขา

2.ผู้หญิงทุกคนมีสองขา

ผลสรุป ผู้หญิงทุกคนเป็นมนุษย์ จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า ผลสรุปเป็นความจริง แต่เป็นการให้เหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผลเพราะเหตุที่นำมาอ้างไม่สามารถบังคับให้เกิดผลสรุปดังกล่าวได้ เหตุแต่ละเหตุมีความเป็นอิสระไม่สัมพันธ์กันแต่ประการใด

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวกับความคิดรวบยอด มีลักษณะเป็นนามธรรม มีการกำหนดสัญลักษณ์ขึ้นใช้ซึ่งมีลักษณะเป็นภาษาสากล มีความเป็นศิลปะในตัวเอง และมีโครงสร้างที่ชัดเจนซึ่งประกอบด้วย คำอนิยาม คำนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท ซึ่งมนุษย์ได้นำคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตประจำวัน ตลอดถึงการนำไปใช้ในการประกอบอาชีพต่างๆ

ระบบคณิตศาสตร์ประกอบด้วย โครงสร้างของคณิตศาสตร์ และกระบวนการให้เหตุผลซึ่งเป็นกระบวนการให้เหตุผลเชิงอุปนัย และนิรนัย

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐานทางตรรกศาสตร์
(Basic Knowledge of Logic)

1. ความหมายตรรกศาสตร์

ตรรกศาสตร์ (Logic) เป็นศิลปะแห่งการนิยามความหมายที่ว่าด้วยเรื่องของเหตุผล เพื่อสรุปความสมเหตุสมผล ซึ่งเป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งในการตีความ การหาความสมเหตุสมผลซึ่งจะทำให้ผู้ศึกษาสามารถสรุปความสมเหตุสมผลได้อย่างรวดเร็ว ดังนั้น ความหมายตรรกศาสตร์เป็นศาสตร์ที่ว่าด้วยการให้เหตุผล

2. ประพจน์ (Proposition or statement)

สิ่งแรกที่ต้องรู้จักในเรื่องตรรกศาสตร์คือ ประพจน์ ข้อความหรือประโยคที่มี**ค่าความจริงเป็นจริง (T) หรือค่าความจริงเป็นเท็จ (F)** อย่างใดอย่างหนึ่ง ส่วนข้อความรูป คำสั่ง คำขอร้อง คำอุทาน คำปฏิเสธ ซึ่งไม่อยู่ในรูปของประโยคบอกเล่า จะเป็นข้อความที่ไม่เป็นประพจน์ สำหรับข้อความบอกเล่าแต่มีตัวแปรอยู่ด้วย ไม่สามารถบอกว่าเป็นจริงหรือเท็จจะไม่เป็นประพจน์ เรียกว่าประโยคเปิด ประโยคที่มีค่าความจริงไม่แน่นอน หรือไม่อาจระบุได้ว่ามีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จได้ ไม่เป็นประพจน์

3. การเชื่อมประพจน์

โดยปกติเมื่อกล่าวถึงข้อความหรือประโยคนั้นมักจะมีกริยามากกว่าหนึ่งตัว แสดงว่าได้นำประโยคมาเชื่อมกัน มากกว่าหนึ่งประโยค ดังนั้นถ้านำประพจน์มาเชื่อมกัน ก็จะได้ประพจน์ใหม่ ซึ่งสามารถบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ตัวเชื่อมประพจน์มีอยู่ 5 ตัว และตัวเชื่อมที่ใช้กันมากในตรรกศาสตร์คือ และ หรือถ้า... แล้ว ก็ต่อเมื่อ ไม่

ตัวเชื่อมประพจน์ “และ” $\wedge$

การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “และ” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \wedge q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นจริง (T) เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นจริง (T) ทั้งคู่ นอกนั้นมีค่าความจริงเป็นเท็จ (F)

ตัวเชื่อมประพจน์ “หรือ” $\vee$

การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “หรือ” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \vee q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ (F) เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ (F) ทั้งคู่ นอกนั้นมีค่าความจริงเป็นจริง (T)

ตัวเชื่อมประพจน์ “ถ้า...แล้ว” $\longrightarrow$

การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “ถ้า...แล้ว” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \longrightarrow q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ (F) เมื่อ p เป็นจริง (T) และ q เป็นเท็จ (F) นอกนั้นมีค่าความจริงเป็นจริง (T)

ตัวเชื่อมประพจน์ “ก็ต่อเมื่อ” $\leftrightarrow$

การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “ก็ต่อเมื่อ” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \leftrightarrow q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นจริง (T) เมื่อ p และ q มีค่าความจริงตรงกัน และจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ (F) เมื่อ p และ q มีค่าความจริงตรงข้ามกัน

นิเสธของประพจน์ “ไม่” ~

นิเสธของประพจน์ใดๆ คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงกันข้ามกับประพจน์นั้นๆ และสามารถเขียนแทนนิเสธของ p ได้ด้วย $\sim p$

4. ตารางค่าความจริง

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

ตารางค่าความจริง(Truth value Table)

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$\sim P$
T	T	**T**	T	T	**T**	F
T	F	F	T	**F**	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	**F**	T	**T**	T

สรุปข้อสังเกต

ตัวเชื่อม $\leftrightarrow$ จุดสังเกต คือ เหมือนกันจริงต่างกันเท็จ

ตัวเชื่อม $\sim$ จุดสังเกต คือ ค่าความจริงตรงข้าม

บทที่ 3
เซต (Set)

เซต เป็นคำที่ไม่ต้องนิยามความหมาย (อนิยาม) (Undefined Term) เรามักใช้เซตแทนสิ่งที่อยู่ร่วมกัน ซึ่งหมายถึง กลุ่มของสิ่งต่างๆ ที่เราสามารถกำหนดสมาชิกได้ชัดเจน (Well-Defined) หรือก็คือความหมายของเซตนั่นเอง

1. การเขียนเซต สามารถเขียนได้ 2 แบบ คือ

1.1 เขียนแบบแจกแจงสมาชิก (Tabular Form) เป็นการเขียนเซตโดยบรรจุสมาชิกทั้งหมดของเซตลงในวงเล็บปีกกา และระหว่างสมาชิกแต่ละตัวคั่นด้วยเครื่องหมายจุลภาค (,)

เช่น A = {1, 3, 5, 7, 9} อ่านว่า A เป็นเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิก คือ 1 , 3 , 5 , 7 , 9

จำนวนสมาชิก n (A) = 5

* ในกรณีที่จำนวนสมาชิกมาก ๆ ให้เขียนสมาชิกอย่างน้อย 3 ตัวแรก
* จากนั้นเขียนจุด 3 จุด (Triple dot) แล้วจึงเขียนสมาชิกตัวสุดท้าย

เช่น A = {1, 2, 3, 4, ...}

B = {a, b, c, ..., z}

C = { ก, ข, ฃ, ..., ฮ}

1.2 เขียนสับเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกในสับเซต (Set builder form)

มีหลักการ คือ แทนสมาชิกของเซตด้วยตัวแปรแล้วกำหนดเงื่อนไขเกี่ยวกับตัวแปรนั้น เพื่อแสดงว่ามีสิ่งใดบ้างที่เป็นสมาชิกของเซต

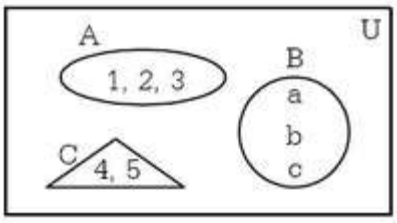
วิธีเขียนเซตโดยวิธีนี้ คือ เขียนตัวแปรและสิ่งที่กำหนดเงื่อนไขเกี่ยวกับตัวแปรลงในวงเล็บปีกกาและคั้นตัวแปรกับสิ่งที่กำหนดเงื่อนไขเกี่ยวกับตัวแปรด้วยเครื่องหมาย “|” หรือ “:”

ตัวอย่าง การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไข

A เป็นเซตของวันในหนึ่งสัปดาห์	จะได้ A = {x | x เป็นวันในหนึ่งสัปดาห์}
B = {1, 2, 3, 4}	จะได้ B = {x | x เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 5}
C = {a, e, i, o, u}	จะได้ C = {x | x เป็นสระในภาษาอังกฤษ}

3. การเขียนเซตด้วยวิธีอื่นๆ เช่น แบบบรรยาย, แบบใช้แผนภาพเวนน์, แบบช่วง เป็นต้น

แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ เป็นแผนภาพที่ใช้เขียนแทนเซตซึ่งแทนเอกภพสัมพัทธ์ U ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า และแทนเซต A, B, ... ด้วยรูปวงกลม หรือวงรี หรือรูปปิดอื่นๆ ดังรูป

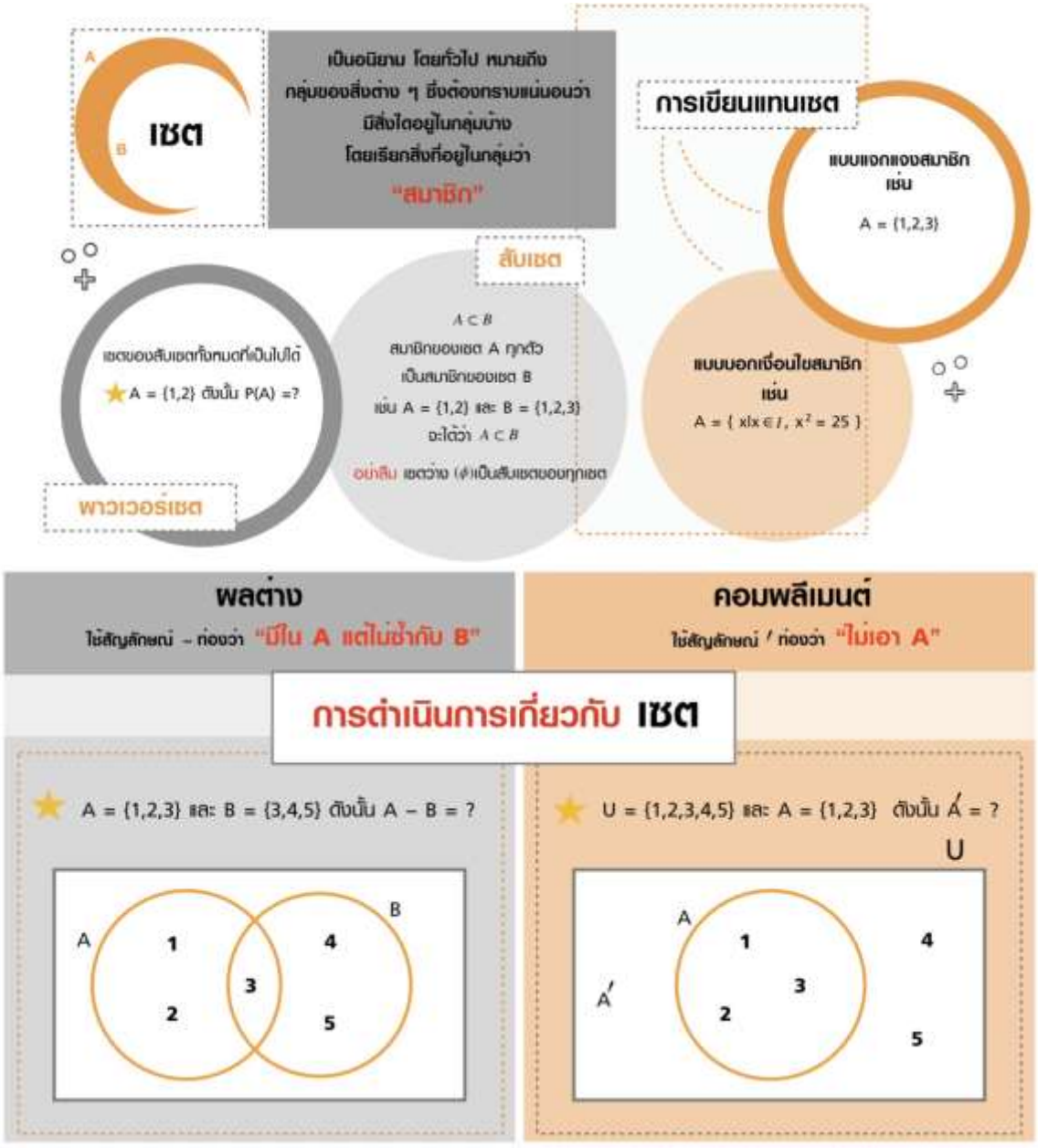


รูปวงรี แทนเซต A โดยที่ A = {1, 2, 3}

รูปวงกลม แทนเซต B โดยที่ B = {a, b, c}

รูปสามเหลี่ยม แทนเซต C โดยที่ C = {4,5}

ซึ่งในเรื่องของแผนภาพนี้เรายังทำไปประยุกต์ใช้ในเรื่องการกระทำระหว่างเซต ซึ่งแสดงด้วยแผนภาพจะทำให้ดูเข้าใจง่ายขึ้น



ยูเนียน

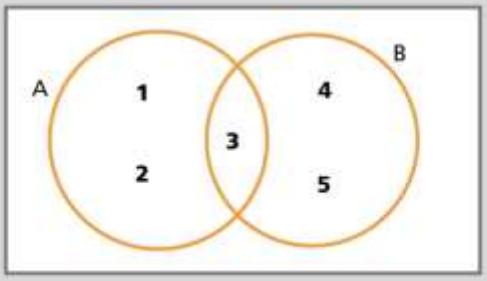
ใช้สัญลักษณ์ $A \cup B$ ท่องว่า "เอามารวมกัน"

อินเตอร์เซกชั่น

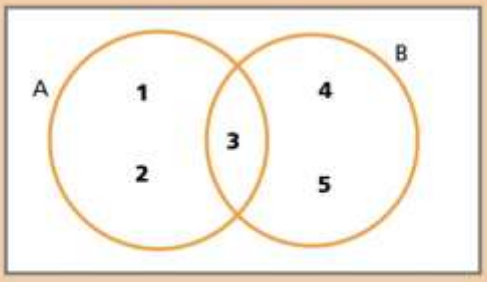
ใช้สัญลักษณ์ $A \cap B$ ท่องว่า "เอาตัวที่ซ้ำกัน"

การดำเนินการเกี่ยวกับ เซต

★ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{3,4,5\}$ ดังนั้น $A \cup B$ = ?



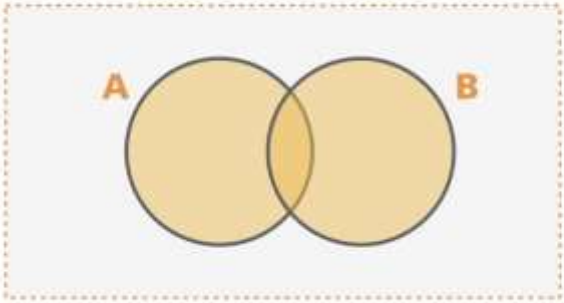
★ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{3,4,5\}$ ดังนั้น $A \cap B$ = ?



จำนวนสมาชิกของ เซตจำกัด

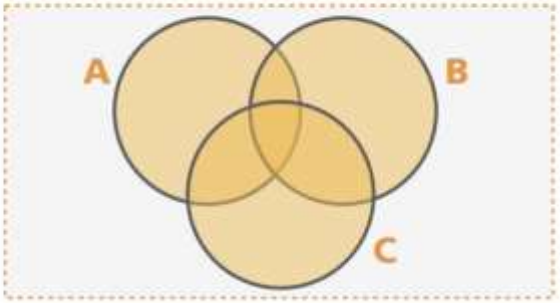
1

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



2

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



บทที่ 4
ระบบจำนวนจริง
(Real Numbers System)

ในอดีตมนุษย์เริ่มรู้จักจำนวนต่อเมื่อมนุษย์เริ่มรู้จักการนับ โดยอาจเริ่มต้นจากการนับนิ้วมือของตนเอง นับจำนวนสมาชิกในครอบครัว นับจำนวนสัตว์เลี้ยง แล้วทำเครื่องหมายแทนจำนวนด้วยการขีดไว้ที่ผนังถ้ำ หรือพื้นดิน ต่อมาเมื่อจำนวนของสิ่งต่างๆ มีปริมาณเพิ่มมากขึ้น จึงเกิดปัญหาความยุ่งยากในการทำเครื่องหมายแทนจำนวน มนุษย์จึงได้คิดประดิษฐ์สัญลักษณ์แทนจำนวนขึ้นมา เรียกว่า ตัวเลข

1. ความเป็นมาของตัวเลข

จากที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น เราจะเห็นว่ามีคำอยู่ 2 คำ คือคำว่า **จำนวน (number)** และ **ตัวเลข (numeral)** ซึ่งคำสองคำนี้จะใช้แตกต่างกัน โดยคำว่าจำนวนนั้น เป็นคำที่ใช้ในการแสดงปริมาณมากน้อย ส่วนคำว่าตัวเลข จะใช้เป็นสัญลักษณ์แทนจำนวน ซึ่งมีรูปลักษณ์ที่แตกต่างกันไปตามเชื้อชาติและภาษา ตัวอย่างเช่น จำนวนสิบห้า อาจใช้ตัวเลข ดังนี้

∩||||| 15 15 XV

ตัวเลขที่ยกตัวอย่างมาให้ดูนี้ ต่างก็เป็นสัญลักษณ์แทนจำนวนที่มีค่าแสดงปริมาณเท่ากับสิบห้า โดยตัวเลขตัวแรกเป็นตัวเลขของชาวอียิปต์โบราณ ตัวที่สองเป็นเลขไทย ตัวที่สามเป็นเลขอารบิก และตัวสุดท้ายเป็นเลขโรมัน ซึ่งต่อไปจะขอกล่าวถึงความเป็นมาพอสังเขปดังนี้

ตัวเลขอียิปต์โบราณ

อียิปต์โบราณรุ่งเรืองถึงขีดสุดเมื่อหกพันปีมาแล้ว ถือว่าเป็นแหล่งอารยธรรมที่เก่าแก่ มีภาษาเขียนเป็นของตนเองที่รู้จักทั่วไป คือ อักษรภาพ ไฮโรกลิฟ (Hieroglyph) ซึ่งรวมถึงตัวเลขด้วย โดยตัวเลขของชาวอียิปต์โบราณมีลักษณะดังนี้

ตัวเลขอียิปต์โบราณ		แทนค่าจำนวน
	(ขีด ความหมายคือคน)	หนึ่ง
	(เส้นโค้ง ความหมายคือแท่นบูชา)	สิบ
	(ขดเชือก หมายถึงการสำรวจพื้นที่)	หนึ่งร้อย

(ดอกบัว ความหมายคือ วันใหม่) หนึ่งพัน

(นิ้วชี้ ความหมายคือการนับ) หนึ่งหมื่น

(กบ หรือ ลูกอ๊อด หมายถึงการเกิด) หนึ่งแสน

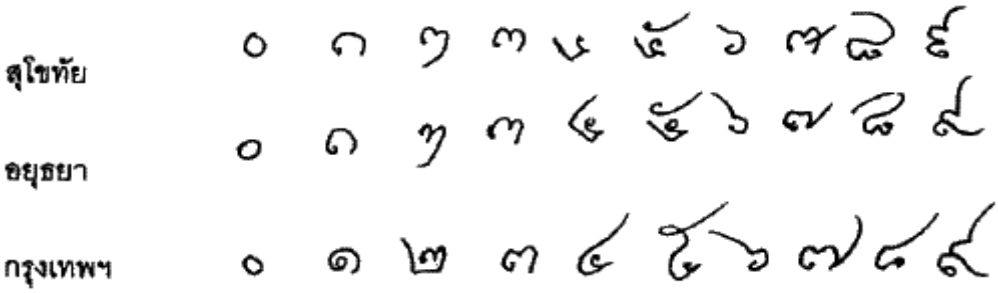
(เทพเจ้าชูมือ หมายถึง จุดกำเนิดเหนือสรรพสิ่ง) หนึ่งล้าน

จากภาพตัวอย่าง จะเห็นว่าเลขอียิปต์โบราณจะแทนค่าเป็นหลักหน่วย สิบ ร้อย พัน หมื่น แสน ล้าน ตามลำดับไปเรื่อยๆ หากว่าเราต้องการจำนวน สองพันห้าร้อยยี่สิบสาม (2523) ก็จะเขียนโดยใช้ตัวเลขหลักพันสองตัว ตัวเลขหลักร้อยห้าตัว ตัวเลขหลักสิบสองตัว และตัวเลขหลักหน่วยสามตัว ดังนี้

2523 =

ตัวเลขไทย

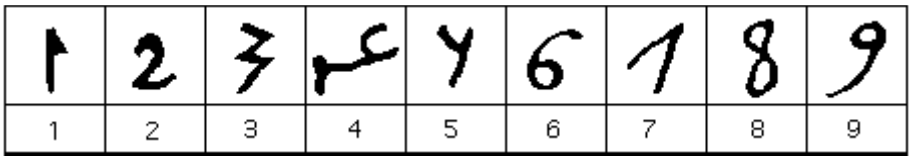
ตัวเลขไทย เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แสดงจำนวนนับในภาษาไทย ประดิษฐ์ขึ้นโดยพ่อขุนรามคำแหงมหาราช โดยดัดแปลงมาจากตัวอักษรขอม และมีต้นตอมาจากอักษรเทวนาครีของอินเดีย เช่นเดียวกับเลขอารบิก เป็นหนึ่งในไม่กี่ภาษาที่ใช้ระบบจำนวนนับเป็นเลขฐานสิบ และมีการเปลี่ยนแปลงสัณฐาน จากอดีตสู่ปัจจุบันน้อยมาก ดังตัวอย่างต่อไปนี้



การใช้เลขไทยเขียนแทนจำนวน จะมีลักษณะการใช้เหมือนเลขอารบิกนั้นคือ เลขแต่ละตัวจะมีค่าประจำหลัก คือ หลักหน่วย สิบ ร้อย พัน หมื่น แสน ล้าน ไปเรื่อยๆ

เลขฮินดู-อารบิก

เลขฮินดู-อารบิก มีต้นกำเนิดมาจากอินเดียและมีการนำมาใช้และเผยแพร่ในยุโรปโดยชาวอาหรับเมื่อราว 1,000 ปีหลังคริสตกาล ดังนั้น ตัวเลขเหล่านี้จึงถูกเรียกชื่อว่า เลขฮินดู-อารบิก หรือเรียกสั้นๆ ว่า เลขอารบิก ก็ได้



เลขโรมัน

ระบบเลขโรมัน เป็นระบบตัวเลขที่ใช้กันแพร่หลายในยุคของโรมันเรืองอำนาจในสมัยโบราณ ถือว่าเป็นระบบเลขที่ไม่อาศัยค่าตำแหน่งของหลักเหมือนเลขอารบิก หมายความว่า ตัวเลขแต่ละตัวจะมีค่าคงที่เสมอ ไม่ว่าจะเขียนตัวเลขไว้ตำแหน่งใดๆ โดยมีการกำหนดค่าของตัวเลขดังต่อไปนี้

ตัวเลขโรมัน	แทนจำนวน
I	หนึ่ง
V	ห้า
X	สิบ
L	ห้าสิบ
C	หนึ่งร้อย
D	ห้าร้อย
M	หนึ่งพัน

การเขียนจำนวนที่นอกเหนือจากที่กำหนดไว้จะอาศัยลักษณะของการบวกและลบ โดยการเอาตัวเลขมาเขียนเรียงกัน ถ้าตัวเลขที่อยู่ทางซ้ายมีค่าน้อยกว่าตัวเลขที่อยู่ทางขวา ให้นำเลขทางซ้ายมาลบเลขทางขวาออก และถ้าตัวเลขที่อยู่ทางซ้ายมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับตัวเลขทางขวาให้นำตัวเลขทั้งสองมาบวกกัน ตัวอย่างเช่น

IX เป็นเลขหนึ่งกับเลขสิบ เลขหนึ่งอยู่ทางซ้ายน้อยกว่าสิบ ก็เอาสิบลบออกหนึ่งเหลือเก้า แสดงว่าตัวเลขนี้มีค่าเป็น **เก้า**

XI เป็นเลขสิบกับเลขหนึ่ง เลขสิบอยู่ทางซ้ายมีค่ามากกว่า ก็จะเอาสิบบวกกับหนึ่งเป็นสิบเอ็ด แสดงว่าตัวเลขนี้มีค่าเป็น **สิบเอ็ด**

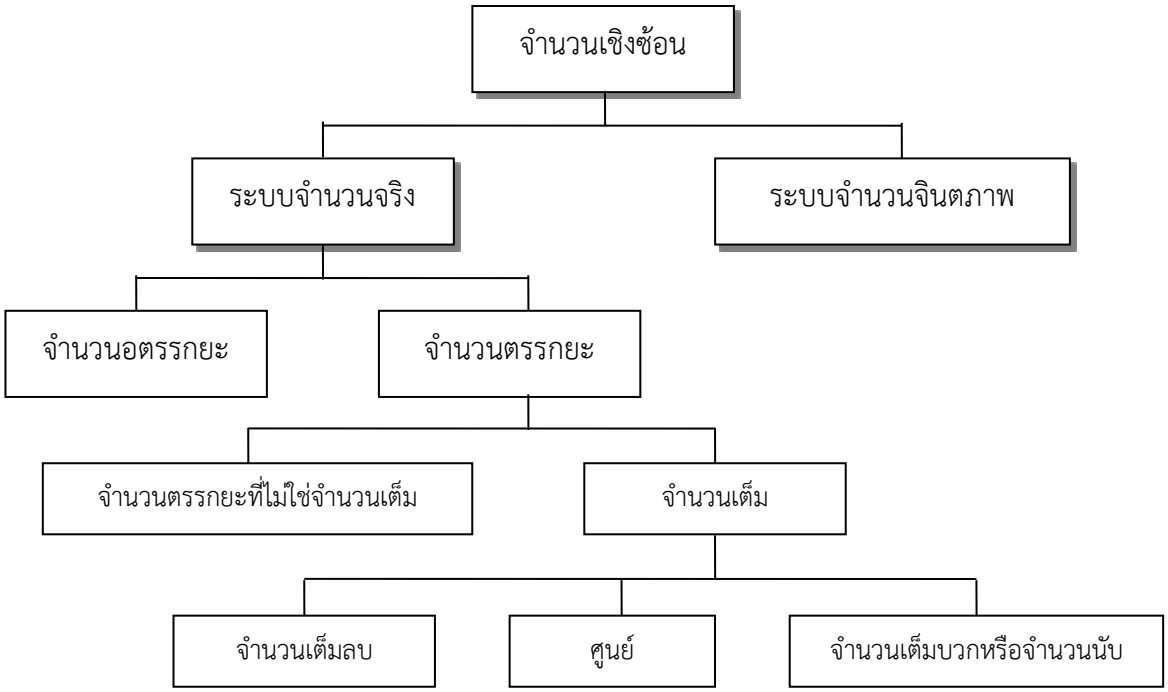
MCDXIII ประกอบด้วยเลข M = 1000, เลข CD = 400 (เพราะว่า C อยู่ทางซ้ายมีค่า 100 น้อยกว่า D ซึ่งมีค่า 500 จึงลบออก เหลือ 400) , เลข XIII = 13 ดังนั้น MCDXIII = 1,413

2. โครงสร้างของระบบจำนวน

ระบบจำนวนเลขเท่าที่มนุษย์คิดค้นพบในขณะนี้ประกอบด้วยเลขจำนวน 2 ระบบ คือ

1. ระบบจำนวนจริง (Real Number System)
2. ระบบจำนวนเชิงซ้อนประเภทจินตภาพ (Imaginary Number System)

สรุปเป็นแผนภูมิได้ดังนี้



จำนวนตรรกยะ (Rational Number) คือ จำนวนที่สามารถเขียนในรูปเศษส่วน a/b เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $b \neq 0$ จำนวนตรรกยะ จำแนกได้เป็น 3 ประเภทใหญ่ ๆ คือ

1. จำนวนเต็ม (Integer)
2. เศษส่วน (Fraction)
3. ทศนิยม (Repeating decimal)

จำนวนอตรรกยะ (Irrational Number) คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนในรูปเศษส่วน a/b เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $b \neq 0$ หรือจำนวนอตรรกยะคือ จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะนั่นเอง จำนวนอตรรกยะ จำแนกได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ใหญ่คือ

1. จำนวนติดกรณ์บางจำนวน เช่น $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[4]{5}$ เป็นต้น

2. จำนวนทศนิยมไม่ซ้ำเช่น 5.18118168473465

หมายเหตุ p ซึ่งประมาณได้ด้วย 22/7 แต่จริงๆ แล้ว p เป็นเลขอตรรกยะ

รากที่สอง (Square root) นิยาม กำหนดให้ a แทนจำนวนจริงบวกใด ๆ หรือ ศูนย์ รากที่สองของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วได้ a

1. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก รากที่สองของ a มี 2 ราก คือ $\pm\sqrt{a}$

2. ถ้า a = 0 รากที่สองของ a คือ 0

บทที่ 5

สมการและอสมการ

(Equation and Inequality)

1. สมการ คือ ประโยคสัญลักษณ์ที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของจำนวนโดยมี

สัญลักษณ์ $=$ บอกความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน คำตอบของสมการ คือ จำนวนที่แทนตัวแปรในสมการแล้วทำให้สมการเป็นจริง หรือสอดคล้องกับสมการ

2. อสมการ คือ ประโยคสัญลักษณ์ที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของจำนวนโดยมี

สัญลักษณ์ $<, >, \leq, \geq, \neq$ บอกความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน คำตอบของอสมการคือ จำนวนที่แทนตัวแปรแล้วในอสมการทำให้อสมการเป็นจริงหรือสอดคล้องกับอสมการ

3. การแก้สมการ

การแก้สมการทำได้ 2 วิธีดังนี้

1. การแทนค่าตัวแปร
2. การใช้คุณสมบัติของการเท่ากัน

1. การแทนค่าตัวแปร

โดยการทดลองแทนค่าของตัวแปรในสมการ ถ้านำจำนวนใดมาแทนค่าของตัวแปรในสมการนั้น แล้วทำให้สมการนั้นเป็นจริง แสดงว่าจำนวนนั้นเป็นคำตอบของสมการ และถ้านำจำนวนใดมาแทนค่าของตัวแปรในสมการนั้น แล้วทำให้สมการเป็นเท็จ แสดงว่าจำนวนนั้นไม่เป็นคำตอบของสมการ ดังตัวอย่าง

สมการ $y + 6 = 21$ แทน y ด้วย 15

จะได้ $15 + 6 = 21$ สมการเป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ 15

สมการ $y + 6 = 21$ แทน y ด้วย 3

จะได้ $3 + 6 \neq 21$ สมการไม่เป็นจริง

ดังนั้น 3 จึงไม่เป็นคำตอบของสมการ

สมการ $5x + 2 = 17$ แทน x ด้วย 2

จะได้ $(5 \times 2) + 2 = 17$

$10 + 2 \neq 17$ สมการไม่เป็นจริง

ดังนั้น 2 จึงไม่เป็นคำตอบของสมการ

สมการ 5x + 2 = 17 แทน x ด้วย 3

จะได้ (5 x 3) + 2 = 17

15 + 2 = 17 สมการเป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ 3

2. การใช้คุณสมบัติของการเท่ากัน

โดยการนำคุณสมบัติการเท่ากันในเรื่อง การบวก การลบ การคูณ การหาร มาใช้ในการแก้สมการ ดูวิธีการในตัวอย่างต่อไปนี้

1) จงแก้สมการ x - 12 = 18

<u>วิธีทำ</u> x - 12 = 18

นำ 12 มาบวกทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ x - 12 + 12 = 18 + 12 (คุณสมบัติการบวก)

นั่นคือ x = 30

<u>ตรวจสอบคำตอบ</u> โดยการแทนค่า x ด้วย 30 ในสมการ x - 12 = 18

จะได้ 30 - 12 = 18 สมการเป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ 30

2) จงแก้สมการ 7x + 8 = 36

<u>วิธีทำ</u> 7x + 8 = 36

นำ 8 มาลบทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ 7x + 8 - 8 = 36 - 8 (คุณสมบัติการลบ)

7x = 28 นำ 7 มาหารทั้งสองข้างของสมการ (คุณสมบัติการหาร)

นั่นคือ x = 4

<u>ตรวจสอบคำตอบ</u> โดยการแทนค่า x ด้วย 4 ในสมการ 7x + 8 = 36

จะได้ (7 x 4) + 8 = 36

28 + 8 = 36 สมการเป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ 4

การแก้อสมการ

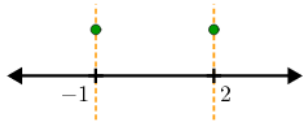
1) จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x2-x-2\geq 0$

แยกตัวประกอบ $x2-x-2=(x+1)(x-2)$

จะได้ว่า $(x+1)(x-2)\geq 0$

ซึ่ง $(x+1)(x-2)$ จะเท่ากับ 0 เมื่อ $x=-1$ และ $x=2$ นำ 2 ค่านี้ไปเขียนเส้นจำนวน

เราจะใช้จุดทึบทั้งสองจุด เนื่องจากอสมการเป็น ≥ แสดงว่าสามารถเป็น 0 ได้



2) จงแก้อสมการ $5x + 2 \geq 6x - 7$

$$2 + 7 \geq 6x - 5x$$

$$9 \geq x$$

$$x \leq 9$$

ช่วงของจำนวนจริง

กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ a < b

1. ช่วงเปิด (a, b)

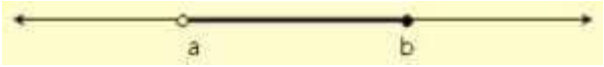
(a, b) = { x | a < x < b }

2. ช่วงปิด [a, b]

[a, b] = { x | a ≤ x ≤ b }

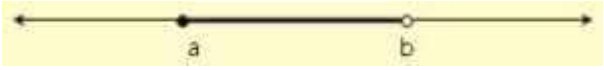
3. ช่วงครึ่งเปิด (a, b]

(a, b] = { x | a < x ≤ b }



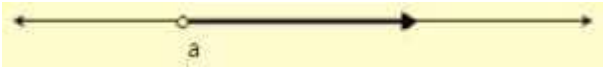
4. ช่วงครึ่งเปิด [a, b)

[a, b) = { x | a ≤ x < b }



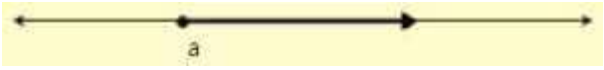
5. ช่วง (a, ∞)

(a, ∞) = { x | x > a}



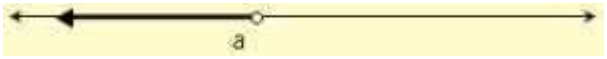
6. ช่วง [a, ∞)

[a, ∞) = { x | x ≥ a}



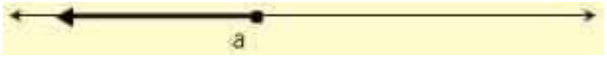
7. ช่วง $(-\infty, a)$

$(-\infty, a) = \{ x \mid x < a\}$



8. ช่วง $(-\infty, a]$

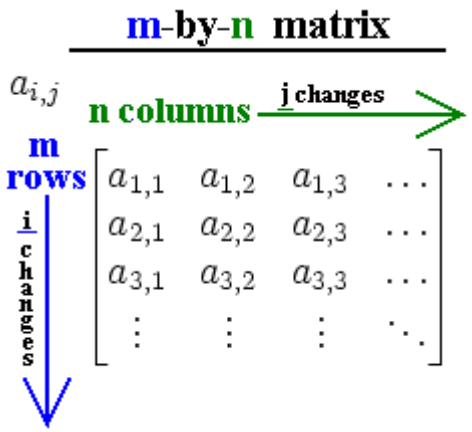
$(-\infty, a] = \{ x \mid x \leq a\}$



บทที่ 6
เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์
(Matrix and Determinant)

เมทริกซ์ (อังกฤษ: matrix) คือตารางสี่เหลี่ยมที่แต่ละช่องบรรจุจำนวนหรือโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่สามารถนำมาบวกและคูณกับตัวเลขได้

เราสามารถใช้เมทริกซ์แทนระบบสมการเชิงเส้น การแปลงเชิงเส้น และใช้เก็บข้อมูลที่ขึ้นกับตัวแปรต้นสองตัว เราสามารถบวก คูณ และแยกเมทริกซ์ออกเป็นผลคูณของเมทริกซ์ได้หลายรูปแบบ เมทริกซ์เป็นแนวความคิดที่มีความสำคัญยิ่งของพีชคณิตเชิงเส้น โดยทฤษฎีเมทริกซ์เป็นสาขาหนึ่งของพีชคณิตเชิงเส้นที่เน้นการศึกษาเมทริกซ์



เมทริกซ์ คือกลุ่มของจำนวนหรือสมาชิกของจำนวนจริงใดๆ เขียนเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือจัตุรัส กล่าวคือเรียงเป็นแถวในแนวนอน และเรียงเป็นแถวในแนวตั้ง เรามักเขียนเมทริกซ์เป็นตารางที่ไม่มีเส้นแบ่งและเขียนวงเล็บคร่อมตารางไว้ (ไม่ว่าจะเป็นวงเล็บโค้งหรือวงเล็บเหลี่ยม) เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 56 & 3 \\ 0 & 15 & 4 \\ 5 & -31 & -4 \end{bmatrix}$$

เราเรียกแถวในแนวนอนของเมทริกซ์ว่า *แถว* เรียกแถวในแนวตั้งของเมทริกซ์ว่า *หลัก* และเรียกจำนวนแต่ละจำนวนในเมทริกซ์ว่า *สมาชิก* ของเมทริกซ์ การกล่าวถึงสมาชิกของเมทริกซ์ จะต้องระบุตำแหน่งให้ถูกต้อง เช่น จากตัวอย่างข้างบน

สมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 2 หลักที่ 3 คือเลข 4

สมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 2 หลักที่ 2 คือเลข 15

สมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 3 หลักที่ 1 คือเลข 5

เราเรียกเมทริกซ์ที่มี m แถว และ n หลัก เรียกว่า *เมทริกซ์* $m \times n$ เราเรียกจำนวน m และ n ว่า *มิติ* หรือ *ขนาด* ของเมทริกซ์

เราใช้สัญญลักษณ์ $A = (a_{i,j})_{m\times n}$ เพื่อหมายถึง เมทริกซ์ A ซึ่งมี m แถว และ n หลัก โดยที่ $a_{i,j}$ (หรือ a_{ij}) หมายถึง สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่ง แถว i และ หลัก j ของเมทริกซ์

$$A = A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1. การกระทำระหว่างเมทริกซ์

การบวกและคูณเมทริกซ์

การบวก

ให้ $A = (a_{i,j})_{m\times n}$ และ $B = (b_{i,j})_{m\times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากันสองเมทริกซ์ เราสามารถนิยาม *ผลรวม* หรือ *ผลบวก A + B* ว่าเป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ที่คำนวณโดยการบวกสมาชิกที่มีตำแหน่งตรงกัน กล่าวคือ หาก $C = (c_{i,j})_{m\times n} = A + B$ แล้ว $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

ยกตัวอย่างเช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

การบวกเมทริกซ์อีกแบบหนึ่งที่เป็นที่นิยมน้อยกว่าคือการบวกตรง

การคูณด้วยสเกลาร์

กำหนดเมทริกซ์ $A = (a_{i,j})_{m\times n}$ และจำนวน *c* เราสามารถนิยาม *ผลคูณสเกลาร์ cA* ว่าเป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ที่คำนวณโดยการนำ *c* ไปคูณสมาชิกแต่ละตัวของ *A* กล่าวคือ หาก $B = (b_{i,j})_{m\times n} = cA$ แล้ว $b_{ij} = ca_{ij}$ ยกตัวอย่างเช่น

$$2\begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 1 & 2\times 8 & 2\times -3 \\ 2\times 4 & 2\times -2 & 2\times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า ปฏิบัติการทั้งสองข้างต้น (การบวกและการคูณด้วยสเกลาร์) ช่วยให้เราสามารถมองเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ว่าเป็นเวกเตอร์ที่มีมิติ *mn* ด้วยเหตุนี้ เซตของเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากับจึงเป็นปริภูมิเวกเตอร์ชนิดหนึ่ง

การคูณ

ถ้า $A = (a_{i,j})_{m\times n}$ และ $B = (b_{i,j})_{n\times p}$ เป็นเมทริกซ์สองเมทริกซ์โดยที่จำนวนหลักของ *A* เท่ากับจำนวนแถวของ *B* แล้ว เราสามารถนิยาม *ผลคูณ AB* ว่าเป็นเมทริกซ์ $C = (c_{i,j})_{m\times p}$ โดยที่

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,i} + \cdots + a_{i,n}b_{n,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$$

กล่าวคือสมาชิกในแถว *i* หลัก *j* ของผลคูณ *AB* คำนวณได้จากการนำสมาชิกของหลัก *i* ของ *A* และสมาชิกของคอลัมน์ *B* ในตำแหน่ง "เดียวกัน" มาคูณกัน แล้วนำผลคูณทั้ง *n* ผลคูณนั้นมาบวกกัน

ปฏิบัติการนี้อาจทำให้เข้าใจได้ง่ายขึ้นถ้ามองเมทริกซ์เป็นเวกเตอร์ของเวกเตอร์ โดยถ้าเราให้ $a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n})$ เป็นเวกเตอร์ที่มีสมาชิกเป็นสมาชิกในแถว *i* ของ *A* และให้ $b_j = (b_{1,j}, b_{2,j}, \ldots, b_{n,j})$ เป็นเวกเตอร์ที่มีสมาชิกเป็นสมาชิกในหลัก *j* ของ *B* แล้ว เราจะได้ว่า $c_{i,j} = a_i \cdot b_j$ เมื่อ $a_i \cdot b_j$ คือผลคูณจุดของ a_i และ b_j เช่น

ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,2} & b_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}$

แล้ว $A \times B = \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 \end{bmatrix}$

และ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \times 3 + 0 \times 2 + 2 \times 1) & (1 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 0) \\ (-1 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 1) & (-1 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

การคูณเมทริกซ์มีสมบัติต่อไปนี้

- *สมบัติการเปลี่ยนหมู่*: *(AB)C = A(BC)* สำหรับเมทริกซ์ *A* ขนาด $k \times m$, *B* ขนาด $m \times n$, และ *C* ขนาด $n \times p$ ใดๆ ("สมบัติการเปลี่ยนหมู่")
- *สมบัติการแจกแจงทางขวา*: *(A + B)C = AC + BC* สำหรับเมทริกซ์ *A* และ *B* ขนาด $m \times n$ และ *C* ขนาด $n \times p$ ใดๆ
- *สมบัติการแจกแจงทางซ้าย*: *C(A + B) = CA + CB* สำหรับเมทริกซ์ *A* และ *B* ขนาด $m \times n$ และ *C* ขนาด $k \times m$ ใดๆ

คำเตือน: การคูณเมทริกซ์นั้นไม่เหมือนกับการคูณจำนวนโดยทั่วไป เนื่องจากมันไม่มีสมบัติสลับที่ กล่าวคือ สำหรับเมทริกซ์ *A* ขนาด $m \times n$ และ *B* ขนาด $n \times p$ ใดๆ

- ถ้า $m \neq p$ แล้ว ผลคูณ *BA* ไม่มีนิยาม
- แม้ *m = p* แต่ถ้า $m \neq n$ แล้ว *AB* เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times m$ ส่วน *BA* เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ผลคูณทั้งสองจึงมีค่าไม่เท่ากันอย่างเห็นได้ชัด
- แม้ *m = n = p* แต่ส่วนมากแล้ว *AB* มักจะมีค่าไม่เท่ากับ *BA* ยกตัวอย่างเช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)

คือผลรวมทางพีชคณิตของทุกๆตัวเลข(Element) ในแนวทะแยงของเมตริกซ์จตุรัส (Square matrix) ใดๆ **โดยให้เครื่องหมายบวก(+) คือ คูณทะแยงลง และเครื่องหมายลบ(-) คือคูณทะแยงขึ้น** ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นตัวเลขหรืออาจติดเครื่องหมาย(+) หรือ เครื่องหมาย(-)ก็ได้

$$\text{เมตริกซ์}\,|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

หาดีเทอร์มิแนนต์ $|A|$ ได้ดังนี้

1.คูณทแยงลงได้ดังนี้

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

จะได้เครื่องหมาย **บวก (+)** $+(a_{11} \times a_{22} \times a_{33}) + (a_{12} \times a_{23} \times a_{31}) + (a_{13} \times a_{21} \times a_{32})$

2.คูณทแยงขึ้นได้

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

จะได้เครื่องหมาย **ลบ (-)** $-(a_{31} \times a_{22} \times a_{13}) - (a_{32} \times a_{23} \times a_{11}) - (a_{33} \times a_{21} \times a_{12})$

ผลลัพธ์ที่ได้

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13}) - (a_{32}a_{23}a_{11}) - (a_{33}a_{21}a_{12})$$

ตัวอย่างการคำนวณ

1) จงหาค่า X เมื่อ $X = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$

X = (5 X 9) + (-) (7 X6)

= 45 – 42

= 3

2) จงหาค่า Y เมื่อ $Y = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$

Y = +(-4 X -5) + (-)(0 X 6)

= 20 - 0

= 20

3) จงหาค่า Z เมื่อ $Z=\begin{vmatrix}-4 & -6\\ -1 & 7\end{vmatrix}$

Z = + (-4 X 7) +(-)(-6 X -1)

= -28 - 6

= -34

4) จงหาค่า ของ A เมื่อ $A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}$

วิธีทำ

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{matrix}$$

$$A=+(1\times3\times2)+(2\times1\times0)+(0\times2\times2)(+)-(0\times3\times0)-(2\times1\times1)-(2\times2\times2)$$

$$A=6+0+0-0-2-8$$

$$A=-4$$

5) จงหาค่า U $U=\begin{vmatrix}2 & 4 & -6\\ 5 & 0 & -2\\ -4 & 7 & 8\end{vmatrix}$

<u>วิธีทำ</u>

$$U=\begin{vmatrix}2 & 4 & -6\\ 5 & 0 & -2\\ -4 & 7 & 8\end{vmatrix}\begin{matrix}2 & 4 & -6\\ 5 & 0 & -2\\ -4 & 7 & 8\end{matrix}$$

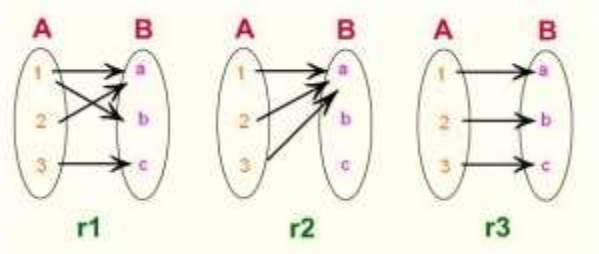
$$=+(2\times0\times8)+(4\times-2\times-4)+(-6\times5\times7)+(-)(-4\times0\times-6)-(7\times-2\times2)-(8\times5\times4)$$

= 0 + 32 + (-210) –0 + 28 - 160

= -310

บทที่ 7
ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
(Relation and Function)

1. ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ จาก เซต หนึ่ง (โดเมน) ไปยังอีกเซตหนึ่ง (โคโดเมน ไม่ใช่ เรนจ์) โดยที่สมาชิกตัวหน้าไม่ซ้ำกัน ความคิดรวบยอดของฟังก์ชันนี้เป็นพื้นฐานของทุกสาขาของคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์เชิงปริมาณ



คู่อันดับ (*Order Pair*) เป็นการจับคู่สิ่งของโดยถือลำดับเป็นสำคัญ เช่น คู่อันดับ a, b จะเขียนแทนด้วย (a, b) เรียก a ว่าเป็นสมาชิกตัวหน้า และเรียก b ว่าเป็นสมาชิกตัวหลัง
(การเท่ากับของคู่อันดับ) $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product) ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B

สัญลักษณ์ ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$ หรือ เขียนในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขจะได้ว่า

ความสัมพันธ์ (Relation) r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

2. โดเมน (Domain) และ เรนจ์ (พิสัย) (Range)

1. **โดเมน (Domain)** ของความสัมพันธ์ r คือ เซตที่มีสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับในความสัมพันธ์ r ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย D_r ดังนั้น $D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$
2. **เรนจ์ (Range)** ของความสัมพันธ์ r คือ เซตที่มีสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับในความสัมพันธ์ r ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย R_r ดังนั้น $R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$

3. ฟังก์ชัน (Function) คือ ความสัมพันธ์ ซึ่งในสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องไม่แตกต่างกัน

หรือ ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ ซึ่งในสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้าสมาชิกตัวหน้าเท่ากัน *สมาชิกตัวหลังต้องเท่ากันด้วย*

ลักษณะของความสัมพันธ์	วิธีหาโดเมน	วิธีหาเรนจ์
เซตแบบแจกแจงสมาชิก	พิจารณาสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับในความสัมพันธ์ r	พิจารณาสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับในความสัมพันธ์ r
เซตแบบบอกเงื่อนไข	1. เปลี่ยนเป็นเซตแบบแจกแจงสมาชิกแล้วพิจารณาสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับในความสัมพันธ์ r 2. พิจารณารูปแบบของเงื่อนไขแล้วจัด y ให้อยู่ในรูป x แล้วหาค่า x ที่ทำให้ y เป็นจริงตามเงื่อนไข 3. เปลี่ยนเป็นเซตแบบแจกแจงสมาชิกแล้วพิจารณาสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับในความสัมพันธ์ r 4. พิจารณารูปแบบของเงื่อนไขแล้วจัด x ให้อยู่ในรูป y แล้วหาค่า y ที่ทำให้ x เป็นจริงตามเงื่อนไข	
กราฟ	พิจารณาค่าของ x ทั้งหมดบนแกน X ที่ใช้ในการเขียนกราฟ	พิจารณาค่าของ y ทั้งหมดบนแกน Y ที่ใช้ในการเขียนกราฟ

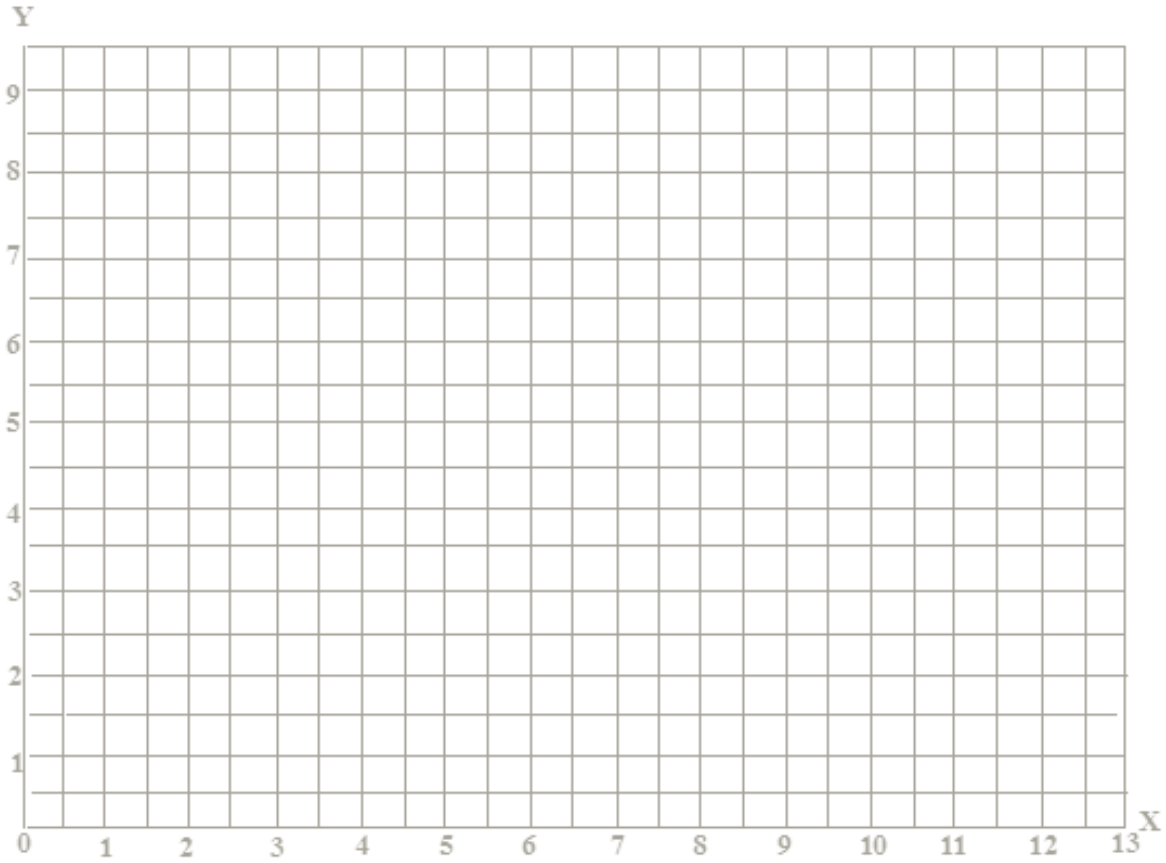
จงเขียนกราฟของคู่อันดับต่อไปนี้ แล้วลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดตามลำดับ แล้วลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดแรกกับจุดสุดท้าย

คู่อันดับ

(3.5, 8.5), (3, 6), (4, 4.5), (5, 6), (4.5, 8.5), (3.5, 9), (1.5, 9), (0.5, 6),

(0.5, 3), (1.5, 3), (1.5, 5.5), (3, 5.5), (4, 5), (4, 1), (6, 1), (6, 4.5), (10, 4.5),

(10, 1), (12, 1), (12, 5), (12.5, 4), (13, 4), (11, 9), (5, 9)



เอกอ้างอิง

ปิยรัตน์ จาตุรัตนบุตร. หลักคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2547.

วรรณี ธรรมโชติ, ผศ. โครงการตำราวิชาการราชภัฏเฉลิมพระเกียรติ เนื่องในวโรกาสพระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัวครองสิริราชสมบัติครบ 60 ปี : หลักการคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร : หจก.ภาพพิมพ์, 2550.

จำนงค์ ทองประเสริฐ. ตรรกศาสตร์ศิลปะแห่งการนิยามความหมายและการใช้เหตุผล. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย, 2548.

https://www.trueplookpanya.com/learning/detail/494-002443

อาจารย์ ดร.ปาณจิตร สุกุมาลย์

1. ประวัติส่วนตัว

ตำแหน่ง อาจารย์ประจำหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต และหลักสูตรครุศาสตรดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชา การสอนสังคมศึกษา ห้องสำนักงาน: อาคารบัณฑิต B203

Email-address: panjitr.suk@mcu.ac.th

Facebook: ปาณจิตร สุกุมาลย์ ID Line: jim_renu12

2. ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2560	การศึกษาดุษฎีบัณฑิต (กศ.ด.) สาขาวิชาวิจัยและประเมินผลการศึกษา มหาวิทยาลัยนเรศวร
พ.ศ. 2554	ครุศาสตรมหาบัณฑิต (ค.ม.) สาขาวิชาวิจัยและประเมินผลการศึกษา มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย
พ.ศ. 2549	ครุศาสตรบัณฑิต (ค.บ.) สาขาวิชาคอมพิวเตอร์ศึกษา มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย
พ.ศ. 2541	ครุศาสตร์อุตสาหกรรมบัณฑิต (ค.อ.บ.) สาขาวิชาวิศวกรรมอุตสาหการ-ออกแบบการผลิต สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตขอนแก่น

3. ประวัติการทำงาน

2562- ปัจจุบัน	ตำแหน่ง อาจารย์ หลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิตและหลักสูตรครุศาสตรดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชา การสอนสังคมศึกษา
2556 – 2562	ตำแหน่ง นักวิชาการศึกษา จัดคำขอตั้งงบประมาณ และการพัฒนา วิทยาเขตขอนแก่น
2549 – 2556	ตำแหน่ง เจ้าหน้าที่บันทึกข้อมูล วางแผนการจัดการศึกษาหลักสูตร
2544 – 2549	ตำแหน่ง เจ้าหน้าที่โครงการหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพครู

4. ประสบการณ์บรรยายในระดับอุดมศึกษา

ระดับปริญญาตรี ได้แก่ รายวิชาคณิตศาสตร์และสถิติเบื้องต้นเพื่อการวิจัย, การวิจัยเพื่อพัฒนาผู้เรียน, การวิจัยทางสังคมศึกษา, การวัดและประเมินผลการเรียนรู้ และเศรษฐศาสตร์เบื้องต้น

ระดับบัณฑิตศึกษา ได้แก่ รายวิชาการวิจัยทางการสอนสังคมศึกษา ระเบียบวิธีการวิจัยชั้นสูงทางการสอนสังคมศึกษา การพัฒนาหลักสูตร ประเด็นปัญหาทางสังคม การจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาคุณภาพการเรียนรู้ การปฏิบัติการสอนสังคมศึกษา การวิจัยทางการศึกษา (ป.โท การสอนภาษาไทย) วิธีวิทยาการวิจัยขั้นสูงทางการบริหารการศึกษา (ป.เอก พุทธบริหารการศึกษา)